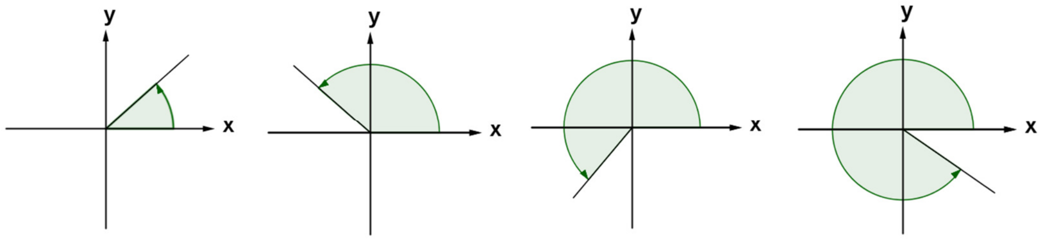
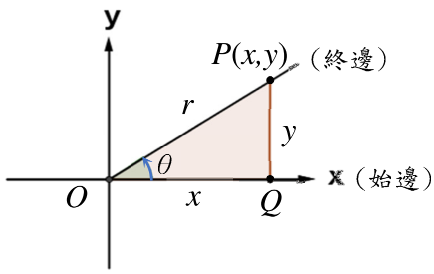
(10) 廣義角的三角函數

在過去的幾節中，我們討論的角都是銳角，也就是小於 90°的角，但是我們可能有大於 90°的角，如下圖所示：



這些角是廣義角，廣義角也有三角函數的，請看下圖



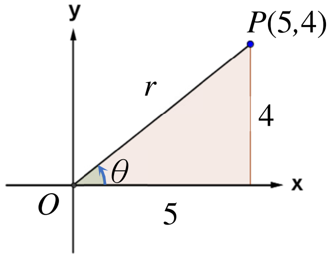
任何一個角都有一個始邊和終邊，我們將始邊放在 x 軸上，然後在終邊上任取一點 P，設 P 點的座標為 P(x,y)，$\overline{OP}$的長度為 r，則

sinθ= $\frac{y}{r}$

cosθ= $\frac{x}{r}$

tanθ= $\frac{y}{x}$

例 1　P(x,y)＝(5,4)

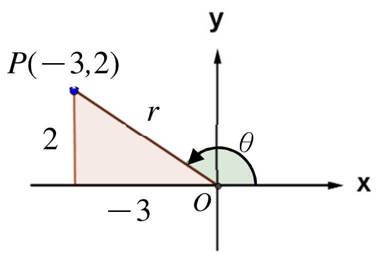


$r = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$sin\,\theta = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$

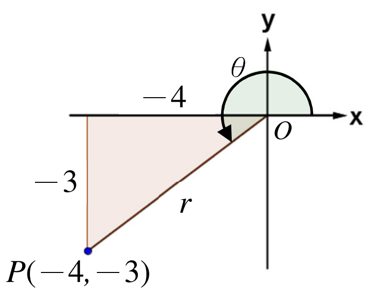
$$cos\,\theta = \frac{5}{\sqrt{41}}$$
$$tan\,\theta = \frac{4}{5}$$

例 2　P(x,y)＝(－3,2)



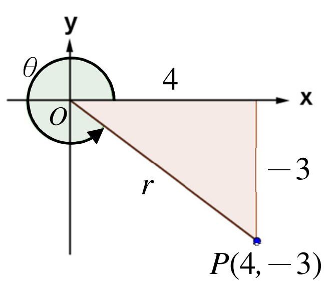
$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$
$$sin\,\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$$
$$cos\,\theta = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$
$$tan\,\theta = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$$

例 3　P(x,y)＝(－4,　－3)



$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$sin\,\theta = \frac{-3}{5}$$
$$cos\,\theta = \frac{-4}{5}$$
$$tan\,\theta = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

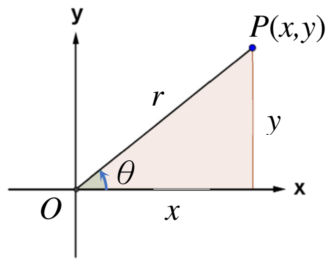
例 4　P(x,y)＝(4,　－3)



$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$sin\,\theta = \frac{-3}{5}$$
$$cos\,\theta = \frac{4}{5}$$
$$tan\,\theta = \frac{-3}{4}$$

我們現在看一下這些角函數的正負值，

第一象限



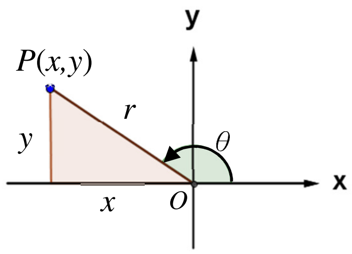
x 和 y 都為正的，因此

$\sin\theta=\frac{y}{r}$為正值

$\cos\theta=\frac{x}{r}$為正值

$\tan\theta=\frac{y}{x}$為正值

第二象限



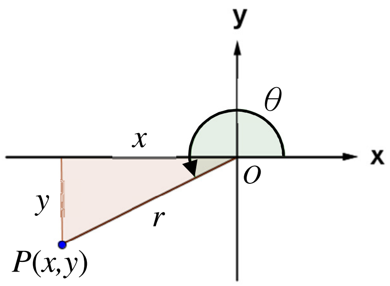
x 為負值，y 為正值，因此

$\sin\theta=\frac{y}{r}$為正值

$\cos\theta=\frac{x}{r}$為負值

$\tan\theta=\frac{y}{x}$為負值

第三象限



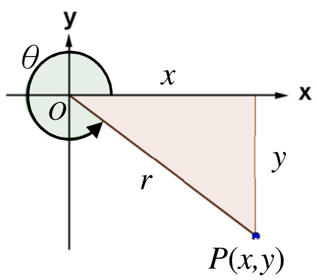
x 和 y 都為負值

sinθ= $\frac{y}{r}$為負值

cosθ= $\frac{x}{r}$為負值

tanθ= $\frac{y}{x}$為正值

第四象限



x 為正值，y 為負值，故

sinθ= $\frac{y}{r}$為負值

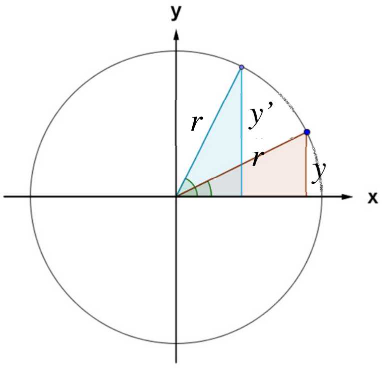
cosθ= $\frac{x}{r}$為正值

tanθ= $\frac{y}{x}$為負值

sinθ 在各象限的變化

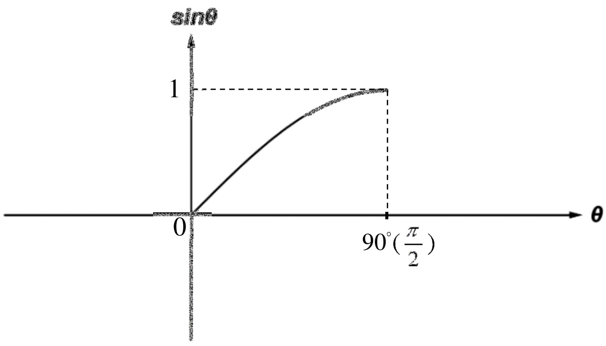
我們畫一個圓，圓的半徑為 r

第一象限

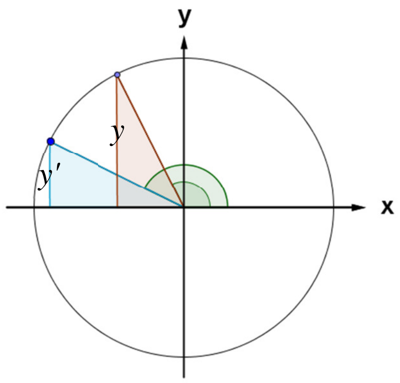


$\sin\theta = \frac{y}{r}$

在第一象限，當 θ 增大時，y 亦增大，所以 $\sin\theta$ 是隨 θ 增加的，而且 $\sin\theta$ 是正值。

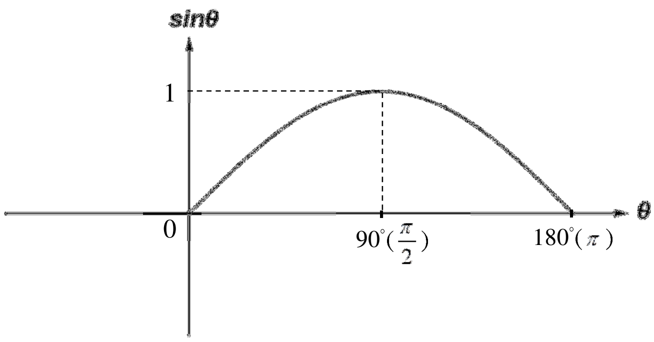


第二象限

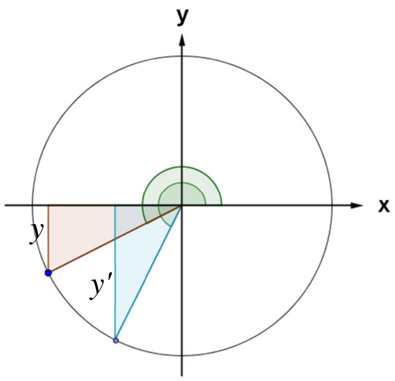


在第二象限，當 θ 增大時，y 會變小，所以 $\sin\theta$ 是隨 θ 增加而變小，

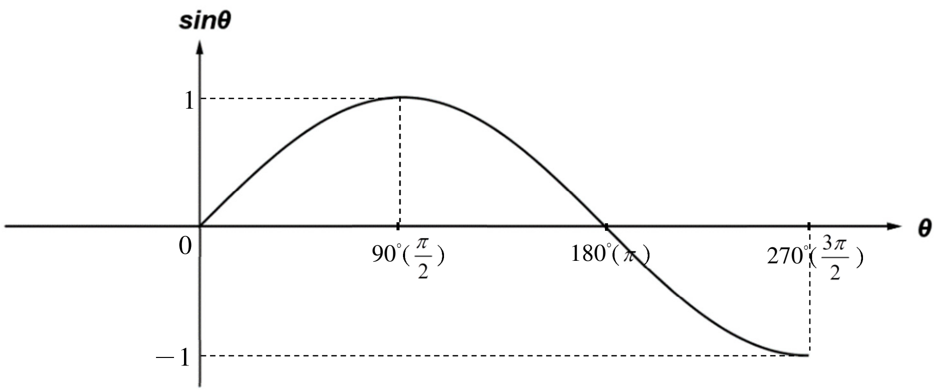
而且 $\sin\theta$ 在第二象限仍是正值。



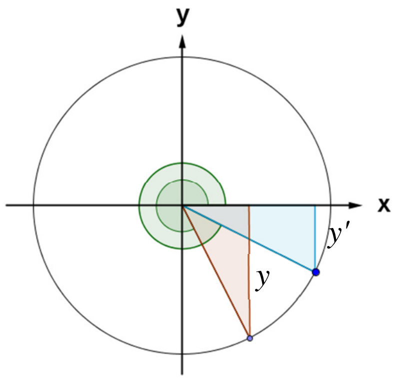
第三象限



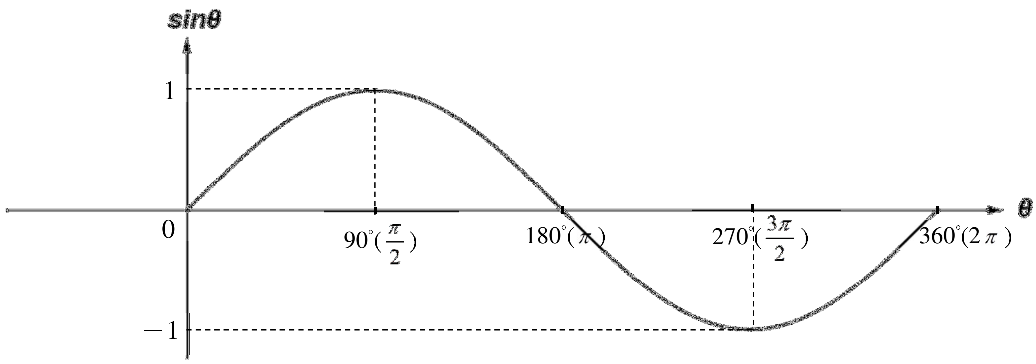
在第三象限，當 θ 增大時，$|y|$ 也變大，但 y 是負值，所以 $\sin\theta=\frac{y}{r}$ 會隨著 θ 變大而越來越小，而且 $\sin\theta$ 在第三象限是負值。



第四象限



在第四象限，當 θ 越大，$|y|$越小，但 y 是負值，所以 $\sin\theta=\frac{y}{r}$會隨著 θ 變大而變大，而且 $\sin\theta$ 在第四象限仍是負值。

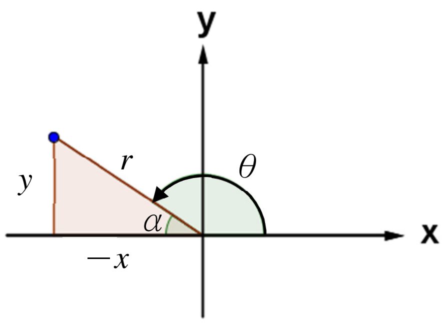


廣義角和銳角有關三角函數的關係

我們如果知道了銳角的三角函數，就可以知道所有廣義角的三角函數。

第二象限

$$90° \leq \theta \leq 180°$$



α=180°－θ

$sin\,\theta = sin\,\alpha = sin(180° - \theta)$

$cos\,\theta = -cos\,\alpha = -cos(180° - \theta)$，因為 x 為負

$tan\,\theta = -tan\,\alpha = -tan(180° - \theta)$，因為 x 為負

例：θ=120°

α=180°－120°=60°

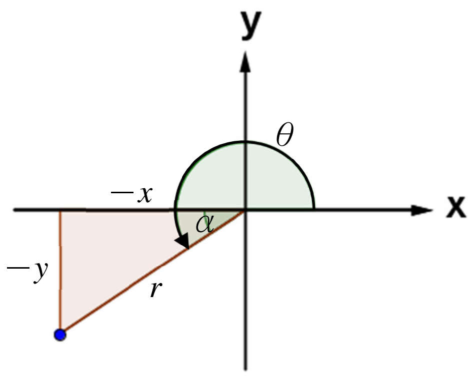
$\therefore$ sin120°=sin60°=$\frac{\sqrt{3}}{2}$

cos120°=－cos60°=－$\frac{1}{2}$

tan120°=－tan60°=－$\sqrt{3}$

第三象限

$$180° \leq \theta \leq 270°$$



$\alpha=\theta-180°$

$sin\,\theta = -sin(\theta - 180°) = -sin\,\alpha$，因為 y 為負

$cos\,\theta = -cos(\theta - 180°) = -cos\,\alpha$，因為 x 為負

$tan\,\theta = tan(\theta - 180°) = tan\,\alpha$，因為 x、y 皆為負

例：$\theta=240°$

$\alpha=\theta-180°=240°-180°=60°$

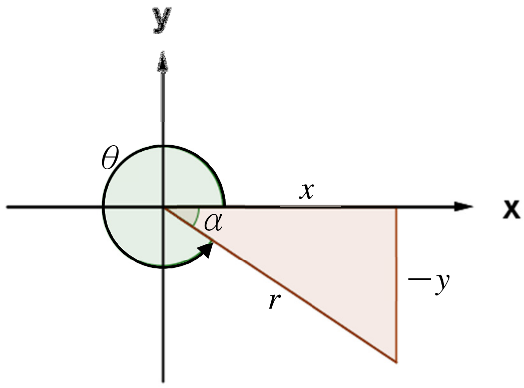
$\therefore \sin 240°=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 240°=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$

$\tan 240°=\tan 60°=\sqrt{3}$

第四象限

$$270° < \theta \leq 360°$$



$\alpha=360°-\theta$

$sin\,\theta = -sin\,\alpha = -sin(360° - \theta)$
$cos\,\theta = cos\,\alpha = cos(360° - \theta)$
$tan\,\theta = -tan(360° - \theta) = -tan\,\alpha$

例：$\theta=330°$

$\alpha=360°-330°=30°$

$\therefore \sin330°=-\sin30°=-\frac{1}{2}$

$\cos330°=\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan330°=-\tan30°=\frac{-1}{\sqrt{3}}$

我們可以將以上的討論總結如下：

(1) 第二象限

$90^\circ < \theta < 180^\circ$
$sin\,\theta = sin(\,180^\circ - \theta)$
$cos\,\theta = -cos(\,180^\circ - \theta)$
$tan\,\theta = -tan(\,180^\circ - \theta)$

(2) 第三象限

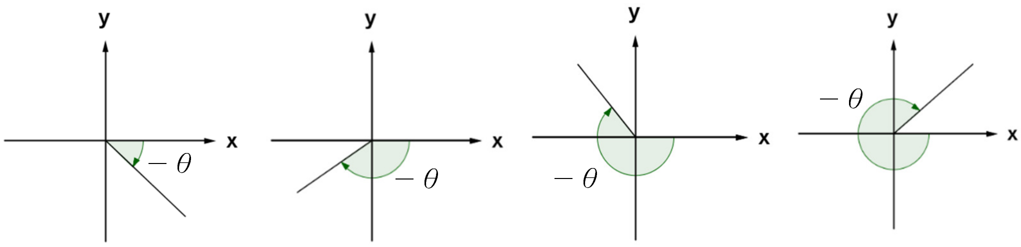
$180^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$
$sin\,\theta = -sin(\,\theta - 180^\circ)$
$cos\,\theta = -cos(\,\theta - 180^\circ)$
$tan\,\theta = tan(\,\theta - 180^\circ)$

(3) 第四象限

$270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$
$sin\,\theta = -sin(\,360^\circ - \theta)$
$cos\,\theta = cos(\,360^\circ - \theta)$
$tan\,\theta = -tan(\,360^\circ - \theta)$

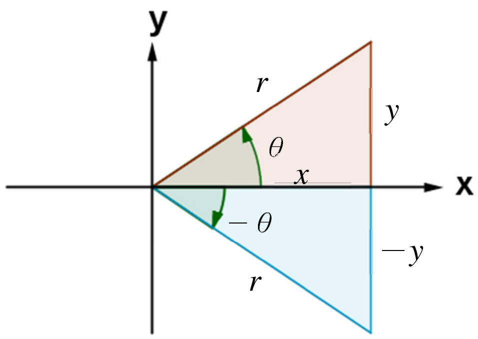
負角的三角函數

負角是指終邊的旋轉是順時針方向的，如下圖所示



$-\theta$ 的三角函數是有關的。

第四象限

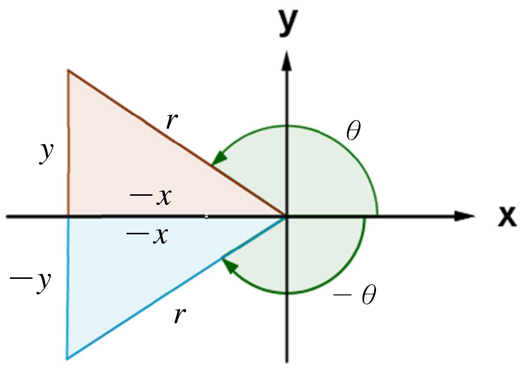


我們可知　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

第三象限

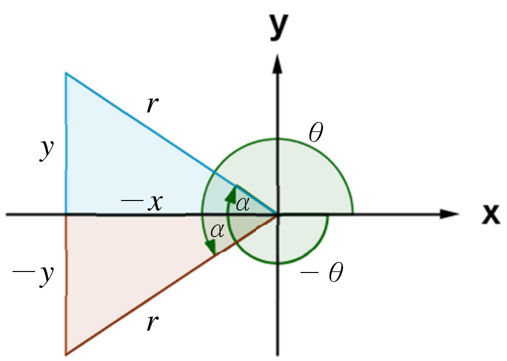


我們可知　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

第二象限

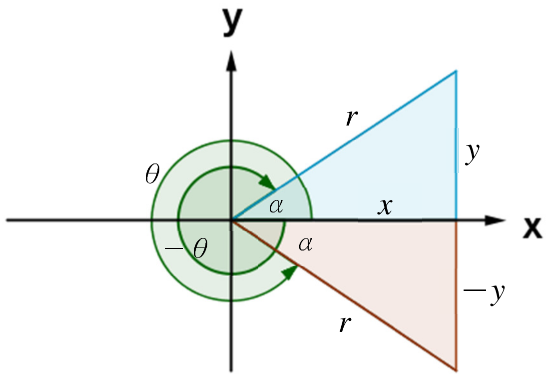


我們可知　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

第一象限



我們可知　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

結論：

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$